JOURNAL OF ALGEBRA 112, 326–348 (1988)

Cohomologie des groupes et des espaces de transformation

BERNARD MAGNERON*

Institut Universitaire de Technologie du Mans, Route de Laval, 72017 Le Mans Cedex, France

Communicated by J. Tits

Received June 1, 1985

The concept of a locally trivial extension of a transformation space (G, X) by a G-module A in a suitable category of topological spaces with superstructure (discrete, differential, algebraic, ...) is introduced. This extends the notion of topologically locally trivial group extensions. Then, using group and equivariant Čech cohomology, a general cohomology theory for these extensions is developed. This can be used, for instance, to study their functorial or their reduction properties. This theory will be applied, in another paper, to obtain cohomological descriptions of the varieties of pure spinors and of the spin groups.

INTRODUCTION

Il est bien connu que l'étude de certaines catégories de fibrés $A \to \tilde{X} \to X$, est liée à la théorie de la cohomologie. Généralement, on fixe la fibre A et la base X, puis on trouve un complexe convenable pour lequel:

(1) Tous les fibrés de la catégorie peuvent être construits à partir d'un cocycle d'ordre p, ce qui permet de les décrire explicitement.

(2) Deux fibrés sont équivalents en un sens à préciser, si et seulement si les cocycles correspondants diffèrent d'un cobord. Par quotient, on obtient une bijection entre le $p$ième groupe de cohomologie du complexe et les classes d'équivalence de ces fibrés. La classification de ces derniers se ramène donc à la connaissance des éléments d'un groupe.

La catégorie des fibrés principaux de base X et de groupe structural A, associée au premier groupe de cohomologie de Čech de X, et celle des extensions d'un groupe X par un X-module A, associée au second groupe de cohomologie de X, fournissent des exemples classiques d'une telle démarche (voir par exemple, [2], [3] et [4]).

Dans ce qui suit, on en fournit une nouvelle illustration. Dans les sec-

* Present address: Département de Mathématiques, C.S.P. Université Paris-Nord, avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse, France.

0021-8693/88 $3.00

tions 2 et 3, nous donnons un sens à la notion d'extension localement triviale d'un espace de transformation (G, X), où G est un groupe agissant sur X, par un G-module A dans le cadre d'une catégorie $\mathscr{C}$ d'espaces topologiques à superstructure (différentielle, analytique, algébrique), introduite préalablement dans la section 1. Dans la section 4, nous montrons qu'une telle extension peut être décrite, modulo la connaissance des structures de (G, X), par un cocycle d'ordre 1 d'un complexe non classique (théorème 4.5). Plus loin (corollaire 5.2), on constate que les classes d'équivalence d'extensions sont en bijection avec le premier groupe de cohomologie de ce complexe. Pour cela, on combine cohomologie des groupes et cohomologie de Čech équivariante. Les cocycles ainsi obtenus sont des fonctions continues, plus précisément des $\mathscr{C}$-morphismes, de type homogène. Ils ont 6 arguments dont 3 font intervenir la cohomologie de Čech et les 3 autres la cohomologie des groupes.

Le formalisme ainsi développé permet un maniement commode de ces extensions. Il met en évidence leurs propriétés fonctorielles (proposition 5.1). Il permet de réduire, en un sens à préciser, certaines d'entre elles à des extensions par un sous-G-module A_0 de A (proposition 5.7).

Les extensions de l'espace de transformation obtenu en faisant agir un groupe G sur lui-même, coïncident avec les extensions localement triviales de G au sens habituel en théorie des groupes. Dans ce contexte, on retrouve (voir 5.5) les résultats utilisés par Cathelineau dans [1, section 2] pour étudier l'homomorphisme de Chern Weil. On sait par ailleurs (voir [8], [10]) que lorsque $\mathscr{C}$ est la catégorie des espaces topologiques localement compacts à base dénombrable d'ouverts, les extensions de groupes peuvent être associées à des cocycles boréliens homogènes à 3 arguments. Nos cocycles sont, à certains points de vue, plus compliqués. Cependant, ils permettent de connaître immédiatement la structure topologique (différentielle, algébrique) des extensions qu'ils décrivent.

L'espace de transformation de base étant de nouveau quelconque, on constate que l'intervention de la cohomologie de Čech n'est pas nécessaire pour certaines extensions qui peuvent être décrites par un cocycle homogène à 3 arguments, ce qui en simplifie l'étude. C'est le cas, par exemple, des extensions de groupes discrets. Le revêtement universel de la grassmannienne des plans lagrangiens orientés qu'on peut associer à l'indice de Maslov en fournit un autre exemple (voir [5, 1.9]). La proposition 5.4 fournit des critères pour savoir si une extension est de ce type. De telles extensions sont étudiées par Tilgner dans [9] dans le cas où A n'est pas nécessairement commutatif, et par le présent auteur dans [7, section 2].

Dans la section 6, on étudie le cas où $\mathscr{C}$ est la catégorie des k-variétés algébriques (k étant un corps quelconque). C'est dans son cadre que sera donné le principal exemple d'application de la théorie. Les références

[11–16] de la bibliographie finale sont destinées à illustrer cette dernière section tandis que les dix premières concernent le reste de l'exposé.

Cet article est suivi d'un autre, dans lequel l'aspect descriptif du présent formalisme (point 1) est utilisé pour donner, dans le cadre des variétés k-algébriques, une description cohomologique des groupes de Clifford, de leur action sur les variétés de spineurs purs et de leur réduction: groupes de Clifford réduits ou groupes spinoriels. Faute de place, nous ne fournirons pas d'autres exemples d'application, bien qu'ils soient nombreux. Signalons à ce propos que l'étude et la classification des extensions des espaces symétriques classiques par $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{T}$ est un problème ouvert et, compte-tenu des nombreux résultats connus sur le sujet, probablement facile.

Les résultats qui suivent ont été annoncés dans [6].

1. La Catégorie $\mathscr{C}$ de référence

1.1. Le formalisme que nous développons s'applique aux catégories $\mathscr{C}$ pour lesquelles on peut introduire les notions de fibrés principaux et de cohomologie de Čech et établir des liens entre elles, en particulier aux catégories des espaces discrets, des espaces topologiques, des variétés différentiables, analytiques, complexes, algébriques sur un corps K algébriquement clos et, à condition d'alourdir les énoncés, des S-schémas. Ces catégories possèdent un produit, et certaines propriétés de restriction et de recollement. En première lecture, on pourra supposer que $\mathscr{C}$ est la catégorie des espaces topologiques et passer directement à la section suivante.

Afin de préciser les axiomes vérifiés par $\mathscr{C}$, nous introduisons une famille $\mathscr{J}$ d'ensembles, telle que

(1) $J \in \mathscr{J}, J' \subseteq J \Rightarrow J' \in \mathscr{J}$.

(2) Pour J, J' dans $\mathscr{J}$, le produit ensembliste de J par J' appartient à $\mathscr{J}$.

Nous associons à $\mathscr{J}$, la sous-catégorie $\mathscr{T}$ des espaces topologiques X tels que

(3) On peut extraire de toute famille d'ouverts $(U_k)_{k \in K}$ qui recouvre un ouvert U de X, une sous-famille indexée par $J \in \mathscr{J}$ qui possède la même propriété.

On pourra, par exemple, supposer que $\mathscr{T}$ est la catégorie des espaces topologiques (resp. des espaces topologiques à base dénombrable d'ouverts, resp. des espaces topologiques noethériens).

On se donne une sous-catégorie $\mathscr{C}$ de la catégorie des couples $(X, \mathcal{O}_X)$ où X est un objet de $\mathscr{T}$ et $\mathcal{O}_X$ un faisceau (appelé faisceau structural) d'anneaux de K-fonctions (i.e., de fonctions à valeurs dans un anneau K) de base X. Les $\mathscr{C}$-morphismes de $(X, \mathcal{O}_X)$ dans $(X', \mathcal{O}_{X'})$ sont les applications $\varphi: X \to X'$ telles que pour tout ouvert U de X et tout $f \in \mathcal{O}_{X'}(U)$, $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$. On suppose de plus que

(4) Si $X = \bigcup_{k \in K} U_k$ où les U_k sont des ouverts de $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{T})$, alors un faisceau $(X, \mathcal{O}_X)$ d'anneaux de K-fonctions sur X est un $\mathscr{C}$-objet si et seulement si les faisceaux restrictions $(U_k, \mathcal{O}_{U_k})$ sont des $\mathscr{C}$-objets.

(5) Il existe un objet $(S, \mathcal{O}_S)$ de $\mathscr{C}$ (nécessairement unique à isomorphisme près) tel que card $S = 1$ et que l'application $X \to S$ soit, pour tout $\mathscr{C}$-objet $(X, \mathcal{O}_X)$, un $\mathscr{C}$-morphisme de $(X, \mathcal{O}_X)$ sur $(S, \mathcal{O}_S)$. On l'appelle morphisme structural de $(X, \mathcal{O}_X)$.

Notant que $k = \mathcal{O}_S(S)$ est un sous-anneau de K, on voit que $(X, \mathcal{O}_X)$ est en fait un faisceau de k-algèbres de K-fonctions de base X.

(6) La catégorie $\mathscr{C}$ possède un produit noté $\times$.

(7) Soient les $\mathscr{C}$-objets $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$. Soit $(X \times Y, \mathcal{O}_{X \times Y})$ leur $\mathscr{C}$-produit. L'application canonique de $X \times Y$ dans le produit ensembliste de X par Y est une bijection.

Dans la suite, un $\mathscr{C}$-objet sera généralement noté X au lieu de $(X, \mathcal{O}_X)$. On pose $X_r = \mathrm{Mor}(S, X)$. On identifie X_r à un sous-ensemble de X (le sous-ensemble des points rationnels) par la correspondance $e \to e(S)$. Notons $\mathcal{O}_{X,x}$ la k-algèbre des germes de fonctions en $x \in X$. On a $X_r = \{x \in X \mid f(x) \in k$, pour tout $f \in \mathcal{O}_{X,x}\}$. Une application constante d'un $\mathscr{C}$-objet Y dans X dont l'image est un élément x de X_r est un $\mathscr{C}$-morphisme.

Nous dirons que le $\mathscr{C}$-objet Y est un sous-objet du $\mathscr{C}$-objet X si Y est un sous-espace topologique de X et si, en tout point y de Y, l'ensemble $\mathcal{O}_{Y,y}$ coïncide avec l'ensemble des restrictions à Y des éléments de $\mathcal{O}_{X,y}$. Dans ce cas, une application du $\mathscr{C}$-objet Z dans Y est un $\mathscr{C}$-morphisme si et seulement si, c'est un $\mathscr{C}$-morphisme de Z dans X.

1.2. Les hypothèses (1) à (7) sont restrictives. Elles pourraient être affaiblies. On pourrait supposer que $\mathscr{C}$ est la catégorie image d'une catégorie $\mathscr{A}$ de faisceaux d'ensembles $(X, \mathcal{O}_X)$ avec $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{T})$, par un foncteur covariant représentable associé à un objet repésentatif quelconque $(S, \mathcal{O}_S)$ de $\mathscr{A}$. On imposerait alors que la catégorie $\mathscr{C}$ soit stable par restriction et par recollement (généralisation du (5) ci-dessus) et qu'elle possède un produit. Le (7) serait abandonné. Dans ce cas, X_r ne se réaliserait plus comme un sous-ensemble de X. Tout ceci nous permettrait de faire entrer les S-schémas dans le cadre de notre étude. Cependant, notre formalisme serait alourdi, ce qui risquerait d'en masquer les idées principales.

La catégorie des espaces topologiques munie du produit usuel est trivialement isomorphe à une catégorie $\mathscr{C}$ du type précédent. Les objets X de $\mathscr{C}$ sont tels que $\mathcal{O}_X$ est le faisceau des fonctions nulles. Nous repoussons à la section 6, la présentation d'un autre exemple d'une telle catégorie.

2. Les G-fibrés principaux dans la catégorie $\mathscr{C}$

2.1. Dans tout ce qui suit, on appelle objet (resp. morphisme) un objet (resp. un morphisme) d'une catégorie $\mathscr{C}$ donnée vérifiant les axiomes (1) à (7) de 1.1. On pourra, pour fixer les idées, supposer en première lecture que $\mathscr{C}$ est la catégorie des espaces topologiques, en notant que dans ce cas, pour tout objet X, $X_r = X$. On posera $X^n = X \times X \times \cdots \times X$ (n fois).

Nous entendons par groupe, un objet dont l'ensemble sous-jacent est muni d'une structure de groupe abstrait, de telle sorte que la composition et l'inversion sont respectivement des morphismes de $G \times G$ dans G et de G dans G et que l'élément neutre $e \in G_r$. On définit de même la notion de morphisme de groupes (dans $\mathscr{C}$). Un sous-groupe de G est un sous-objet de G stable par la composition et par l'inversion. Pour éviter les ambiguités, les groupes ordinaires sont appelés groupes abstraits.

Un espace de transformation (G, X) (dans $\mathscr{C}$) est la donnée d'un groupe G, agissant sur un objet X de telle sorte que l'application $(g, x) \mapsto gx$ de $G \times X$ sur X soit un morphisme. Un morphisme d'espaces de transformation (φ', φ): $(G, X) \to (G', X')$ est la donnée d'un morphisme φ: $X \to X'$ et d'un morphisme de groupes φ': $G \to G'$ tels que $\varphi'(g)\,\varphi(x) = \varphi(gx)$ sur $G \times X$. Un sous-espace de transformation de (G, X) est la donnée d'un sous-groupe de G puis d'un sous-objet de X stable sous l'action de ce sous-groupe. L'espace de transformation obtenu en faisant agir G sur lui-même par l'action naturelle $g, g' \to gg'$ sera encore noté G.

L'espace de transformation (G, A) est dit être un G-module si A est un groupe commutatif et si $g(a + a') = ga + ga'$ sur $G \times A \times A$.

Désormais X, G, (G, X) et O désigneront respectivement un objet, un groupe d'élément neutre e, un espace de transformation et un point fixé de X_r considéré comme origine. De même, A désignera un groupe d'élément neutre 0, dont on note dès à présent additivement la loi de composition et l'action sur les espaces de transformation (nous préciserons quand l'hypothèse de commutativité devient nécessaire).

2.2. On dit que $(\tilde{X}, \pi, X, A)$ (ou simplement $\tilde{X}$) est un fibré principal (dans $\mathscr{C}$) d'espace total $\tilde{X}$, de projection π, de base X et de groupe structural A si $(A, \tilde{X})$ est un espace de transformation, et si π est un morphisme de $\tilde{X}$ dans X vérifiant $\pi(a + \tilde{x}) = \pi(\tilde{x})$ sur $A \times \tilde{X}$. On suppose de plus que tout point de X est contenu dans un ouvert (dit de trivialisation) U de X, associé à un morphisme σ_U: $U \to \tilde{X}$ (appelé section au-dessus de

U) tel que $\pi \circ \sigma_U = Id_U$ et que le morphisme θ_U: $(a, x) \to a + \sigma_U(x)$ de $A \times U$ dans $\pi^{-1}(U)$ soit un isomorphisme.

On dit, de plus, que $(\tilde{X}, \pi, X, A)$ est un G-fibré principal (dans $\mathscr{C}$) si (G, A), $(G, \tilde{X})$ et (G, X) sont des espaces de transformation tels que $g(a + a') = ga + ga'$ sur $G \times A \times A$ (on dit alors que G agit par automorphismes sur A), $g(a + \tilde{x}) = ga + g\tilde{x}$ sur $G \times A \times \tilde{X}$ et $\pi(g\tilde{x}) = g\pi(\tilde{x})$ sur $G \times \tilde{X}$.

On dit que les (G)-fibrés principaux $(\tilde{X}, \pi, X, A)$ et $(\tilde{X}', \pi', X', A)$ sont équivalents par l'isomorphisme $\eta: \tilde{X} \to \tilde{X}'$ si $\pi' \circ \eta(\tilde{x}) = \pi(\tilde{x})$ sur $\tilde{X}$, $\eta(a + \tilde{x}) = a + \eta(\tilde{x})$ sur $A \times \tilde{X}$ et (éventuellement) $\eta(g\tilde{x}) = g\eta(\tilde{x})$ sur $G \times \tilde{X}$. On dit alors que η est une équivalence.

2.3. Etant donnés un objet I, un ouvert $\mathbf{U}$ de $I \times X$ et $i \in I$, on note U_i l'image réciproque de $\mathbf{U}$ par l'application $x \to (i, x)$ de X dans $I \times X$. Si $i \in I_r$, U_i est un ouvert de X. Lorsque les U_i $(i \in I_r)$ recouvrent X, on dit qu'on a un recouvrement $\mathscr{U} = (U_i)_{i \in I}$ indicé par I, qui admet $\mathbf{U}$ comme ouvert de définition dans $I \times X$. On dit aussi que $\mathbf{U}$ est l'ouvert des éléments (i, x) de $I \times X$ tels que $x \in U_i$. Lorsque de plus, (G, X) et (G, I) sont des expaces de transformation et que $\mathbf{U}$ est invariant par l'action naturelle de G sur $I \times X$, on dit que $\mathscr{U}$ est un G-recouvrement.

Lorsque $I = S$ (avec card $S = 1$ comme dans le (5) de 1.1), l'action éventuelle de G sur S est nécessairement triviale et $\mathbf{U}$ est isomorphe à X. On obtient alors le (G)-recouvrement trivial $\mathscr{U}_0 = (X)$.

Un système (équivariant) de sections σ relativement à $\mathscr{U}$ pour le (G)-fibré principal $\tilde{X}$ est un morphisme σ: $(i, x) \to \sigma_i(x)$ de $\mathbf{U}$ dans $\tilde{X}$ tel que $\pi \circ \sigma_i(x) = x$ et que (éventuellement) $g\sigma_i(x) = \sigma_{gi}(gx)$ sur $G \times \mathbf{U}$.

2.4. Proposition. *Pour tout (G)-fibré $\tilde{X}$ de base X, il existe un système (équivariant) de sections relativement à un certain G-recouvrement $\mathscr{U}$.*

Preuve. Nous prouvons la proposition dans deux cas particuliers. Le résultat général s'en déduirait. Dans le premier cas, on suppose que $\tilde{X}$ est seulement un fibré principal. On se place dans le contexte et les notations de 1.1. On peut trouver une famille d'ouverts de trivialisation $(U_j)_{j \in J}$, associés à des sections σ_{U_j}, qui recouvrent X de telle sorte que $J \in \mathscr{J}$. Si $(X_j)_{j \in J}$ est une famille d'objets, on désigne par $\bigcup_{j \in J} X_j$ l'objet construit par union disjointe en utilisant le (4) de 1.1. On munit J de la topologie discrète puis d'une structure d'objet notée I de telle sorte que chaque élément j de J en tant qu'ouvert de I soit muni d'une structure d'objet S_j isomorphe à S et que $I = \bigcup_{j \in J} S_j$. On a donc $I_r = J$. On voit que $I \times X = (\bigcup_{j \in J} S_j) \times X = \bigcup_{j \in J} (S_j \times X) = \bigcup_{j \in J} X_j$ où les X_j sont des ouverts disjoints de $I \times X$ isomorphes à X. Identifiant chaque U_j à un ouvert de X_j, on définit l'ouvert $\mathbf{U} = \bigcup_{j \in J} U_j$ de $I \times X$ puis le morphisme σ: $\mathbf{U} \to \tilde{X}$ tel que la restriction de σ à chacun des U_j coïncide avec σ_{U_j}.

Dans le second cas, on suppose que $\tilde{X}$ est un G-fibré principal et qu'il existe une section globale σ_X de X dans $\tilde{X}$. On choisit $I = G$, $\mathbf{U} = G \times X$. On définit σ par $\sigma_g(x) = g\sigma_X(g^{-1}x)$ sur $G \times X$.

Dans le premier cas (resp. le second), σ définit un système (resp. un système équivariant) de sections pour le recouvrement (resp. le G-recouvrement) $\mathscr{U}$ de X admettant $\mathbf{U}$ comme ouvert de définition. ▮

2.5. Dans le contexte ci-dessus, on a un unique morphisme $c:(i, i', x) \to c_{i'i}(x)$ défini sur l'ouvert des éléments $x \in U_i \cap U_{i'}$ de $I^2 \times X$ et à valeurs dans A, qui vérifie $c_{i'i}(x) + \sigma_i(x) = \sigma_{i'}(x)$. On dit que c est un système (équivariant) de fonctions de transition relativement à $\mathscr{U}$; nous entendons par là que

(i) $c_{i''i'}(x) + c_{i'i}(x) = c_{i''i}(x)$ sur l'ouvert des éléments $x \in U_i \cap U_{i'} \cap U_{i''}$ de $I^3 \times X$.

(ii) (éventuellement), $gc_{i'i}(x) = c_{gi', gi}(gx)$ sur l'ouvert des éléments $x \in U_i \cap U_{i'}$.

Inversement, en utilisant les propriétés (1) à (7) de 1.1, on voit qu'étant donné un système (équivariant) quelconque de fonctions de transition c relativement au (G)-recouvrement $\mathscr{U}$ de X, il existe un (G-) fibré principal $\tilde{X}$, unique à équivalence près, et une famille $(\beta_i)_{i \in I_r}$ d'isomorphismes de $A \times U_i$ dans $\pi^{-1}(U_i)$ tels que, sur $A \times U_i$, $\pi \circ \beta_i(a, x) = x$ et que sur $A \times (U_i \cap U_{i'})$, $\beta_i^{-1}\beta_{i'}(a, x) = (a + c_{i'i}(x), x)$.

L'action éventuelle de G sur $\tilde{X}$ est telle que, pour $i, i' \in I_r$, on a sur un ouvert convenable de $G \times A \times X$,

$$g\beta_i(a, x) = \beta_{i'}(ga + c_{gi,i'}(gx), gx).$$

Les systèmes (équivariants) de fonctions de transition c et c' relativement à $\mathscr{U}$ sont dits être équivalents s'il existe un morphisme n, à valeurs dans A, défini sur l'ouvert des éléments de $I \times X$ tels que $x \in U_i$ et qui vérifie, sur des ouverts convenables, les relations

$$c'_{i'i}(x) = n_{i'}(x) + c_{i'i}(x) - n_i(x)$$

avec éventuellement

$$n_{gi}(gx) = gn_i(x).$$

En adaptant les résultats classiques, on vérifie que les constructions précédentes mettent en bijection les classes d'équivalence de système (équivariant) de fonctions de transition relativement à $\mathscr{U}$ et les classes d'équivalence de (G-) fibrés principaux qui possèdent un système (équivariant) de sections relativement à $\mathscr{U}$.

2.6. Proposition. *Soient les groupes A et A' (sur lesquels G agit éventuellement par automorphismes), $\varphi: A \to A'$ un morphisme de groupes tel que (éventuellement) $\varphi(ga) = g\varphi(a)$ sur $G \times A$, et $(\tilde{X}\pi, X, A)$ un (G)-fibré principal.*

(1) *Il existe un (G)-fibré principal $(\tilde{X}', \pi', X, A')$ et un morphisme, qu'on note encore φ, de $\tilde{X}$ dans $\tilde{X}'$ tel que $\pi = \pi' \circ \varphi$ sur $\tilde{X}$, $\varphi(a + \tilde{x}) = \varphi(a) + \varphi(\tilde{x})$ sur $A \times \tilde{X}$ et que (éventuellement) $\varphi(g\tilde{x}) = g\varphi(\tilde{x})$ sur $G \times \tilde{X}$.*

(2) *Si $(\tilde{X}'', \pi'', X, A'')$ associé à $\varphi': \tilde{X} \to \tilde{X}''$ est un second fibré vérifiant ces propriétés, alors $\tilde{X}'$ et $\tilde{X}''$ sont canoniquement équivalents: on a une équivalence unique η: $\tilde{X}' \to \tilde{X}''$ telle que $\eta(\varphi(\tilde{x})) = \varphi'(\tilde{x})$ sur $\tilde{X}$.*

Preuve. (1) Soit c un système (équivariant) de fonctions de transition pour $\tilde{X}$ relativement à un $(G\text{-})$ recouvrement $\mathcal{U}$. On définit $\tilde{X}'$ comme le $(G\text{-})$ fibré admettant $\varphi(c)$ pour système de fonctions de transition de telle sorte que $\varphi(c)_{ji}(x) = \varphi(c_{ji}(x))$, on définit alors le morphisme φ: $\tilde{X} \to \tilde{X}'$ par $\varphi(\beta_i(a, x)) = \beta_i(\varphi(a), x)$.

Le (2) se vérifie de façon analogue. ▌

On dit que le morphisme $\varphi: \tilde{X} \to \tilde{X}'$ est un morphisme de fibrés principaux associé à φ: $A \to A'$. On note $\varphi_*(\tilde{X})$ la classe d'équivalence de $\tilde{X}'$.

2.7. Si A est commutatif et si φ est l'automorphisme $a \to -a$ de A, on désigne par $(\tilde{X}^-, \pi^-, X, A)$ un élément de $\varphi_*(\tilde{X})$. On pose $\tilde{x}^- = \varphi(\tilde{x})$ sur $\tilde{X}$. Par ailleurs, si $(\tilde{X}, \pi, X, A)$ et $(\tilde{X}', \pi', X', A)$ sont des fibrés principaux, il en est de même de $(\tilde{X} \times \tilde{X}', \pi \times \pi', X \times X', A \times A)$. Définissons maintenant $\varphi: A \times A \to A$ par $\varphi(a, a') = aa'$. On note $(\tilde{X} \boxtimes \tilde{X}', \pi \boxtimes \pi', X \times X', A)$ un élément (appelé produit tensoriel extérieur de $\tilde{X}$ et de $\tilde{X}'$), de $\varphi_*(\tilde{X} \times \tilde{X}')$. Sur $\tilde{X} \times \tilde{X}'$, on pose $\tilde{x} \boxtimes \tilde{x}' = \varphi(\tilde{x}, \tilde{x}')$.

3. Extensions d'espaces de transformation

3.1. On dit que l'espace de transformation $(\tilde{G}, \tilde{X})$ est une extension (dans $\mathscr{C}$) de l'espace de transformation (G, X) par A, si $\tilde{G}$ et $\tilde{X}$ sont munis d'une structure de fibré principal: $(\tilde{G}, \pi', G, A)$ et $(\tilde{X}, \pi, X, A)$ et si

(1) (π', π) est un morphisme d'espaces de transformation de $(\tilde{G}, \tilde{X})$ sur (G, X).

(2) $(a + \tilde{g})\tilde{g}' = a + \tilde{g}\tilde{g}'$ sur $A \times \tilde{G} \times \tilde{G}$.

(3) $(a + \tilde{g})\tilde{x} = a + \tilde{g}\tilde{x}$ sur $A \times \tilde{G} \times \tilde{X}$.

Par exemple, un groupe topologique $\tilde{G}$ est une extension localement triviale du groupe G par A, si et seulement si, l'espace de transformation topologique associé est une extension par A de G agissant sur lui-même suivant notre terminologie.

Deux extensions $(\tilde{G}, \tilde{X})$ et $(\tilde{G}', \tilde{X}')$ de (G, X) par A sont dîtes équivalentes s'il existe un isomorphisme d'espace de transformation de l'une sur l'autre tel que η (resp. η') définisse une équivalence entre les fibrés principaux $\tilde{X}$ et $\tilde{X}'$ (resp. $\tilde{G}$ et $\tilde{G}'$).

Lorsque A est commutatif, on verifie qu'on peut munir (G, A) d'une unique structure de G-module de telle sorte que pour $g = \pi'(\tilde{g})$,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(a + \tilde{g}') &= ga + \tilde{g}\tilde{g}' \quad \text{sur} \quad \tilde{G} \times A \times \tilde{G} \\ \tilde{g}(a + \tilde{x}) &= ga + \tilde{g}\tilde{x} \quad \text{sur} \quad \tilde{G} \times A \times \tilde{X}. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

3.2. Désormais, (G, A) désigne toujours un G-module fixe. Soit $\mathscr{F}(G, X, A)$ la famille des extensions de l'espace de transformation (G, X) par A qui vérifient (3.1.1). Si $(\tilde{G}, \tilde{X}) \in \mathscr{F}(G, X, A)$, on a une action naturelle de G sur $\tilde{X}^- \boxtimes \tilde{X}$ caractérisée par la formule

$$g(\tilde{x}^- \boxtimes \tilde{x}') = (\tilde{g}\tilde{x})^- \boxtimes \tilde{g}\tilde{x}' \qquad \text{avec} \quad g = \pi'(\tilde{g})$$

de telle sorte que $(\tilde{X}^- \boxtimes \tilde{X}, \pi^- \boxtimes \pi, X^2, A)$ est de façon naturelle un G-fibré principal.

Désormais, $\mathscr{U}$ désignera toujours un G-recouvrement de X^2 indicé par I et admettant $\mathbf{U}$ comme ouvert de définition dans $I \times X^2$. Soit $\mathscr{F}(G, \mathscr{U}, A)$ la classe des éléments de $\mathscr{F}(G, X, A)$ pour lesquels il existe un système équivariant de sections relativement à $\mathscr{U}$ pour le G-fibré $\tilde{X}^- \boxtimes \tilde{X}$. Désormais, $(\tilde{G}, \tilde{X})$ désignera toujours un élément de $\mathscr{F}(G, \mathscr{U}, A)$, $\tilde{e}$ l'élément neutre de $\tilde{G}$ et $\tilde{O}$ un élément de $\tilde{X}$, tel que $\pi(\tilde{O}) = O$. On conviendra de plus que dans toutes les formules et dans tous les énoncés dans lesquels g et $\tilde{g}$ (resp. x et $\tilde{x}$) apparaissent simultanément, on a $\pi'(\tilde{g}) = g$ et $\pi(\tilde{x}) = x$.

On dit que le morphisme $s: (i, \tilde{x}, \tilde{x}') \to s_i(\tilde{x}, \tilde{x}')$, défini sur l'ouvert des éléments $(i, \tilde{x}, \tilde{x}')$ de $I \times \tilde{X}^2$ tels que $(x, x') \in U_i$, à valeurs dans A, est une fonction de Maslov relativement à $\mathscr{U}$ pour $(\tilde{G}, \tilde{X})$ si on a

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad gs_i(\tilde{x}, \tilde{x}') = s_{gi}(\tilde{g}\tilde{x}, \tilde{g}\tilde{x}') \\ &\text{(ii)} \quad s_i(\tilde{x}, a + \tilde{x}') = a + s_i(\tilde{x}, \tilde{x}'). \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Pour l'origine de cette terminologie, voir [9, 7].

Relativement à $\mathscr{U}$, la donnée d'une fonction de Maslov s pour $(\tilde{G}, \tilde{X})$ est équivalente à celle d'un système équivariant de sections σ pour le G-fibré $\tilde{X}^- \boxtimes \tilde{X}$. Les deux concepts sont liés par la formule

$$s_i(\tilde{x}, \tilde{x}') + \sigma_i(x, x') = \tilde{x}^- \boxtimes \tilde{x}'. \tag{3.2.2}$$

Désormais, $(\tilde{G}, \tilde{X}, s)$ désigne toujours un élément de la famille $\mathscr{E}(G, \mathscr{U}, A)$ des triplets ainsi obtenus. On dit que $(\tilde{G}, \tilde{X}, s)$ et $(\tilde{G}', \tilde{X}', s')$ sont équivalents dans $\mathscr{E}(G, \mathscr{U}, A)$ si on a une équivalence d'extensions (η', η) de l'un sur l'autre telle que $s_i'(\eta(\tilde{x}), \eta(\tilde{x}')) = s_i(\tilde{x}, \tilde{x}')$.

On pose $\mathscr{F}(G, X, A) = \mathscr{F}(G, \mathscr{U}_0, A)$ et $\mathscr{E}(G, X, A) = \mathscr{E}(G, \mathscr{U}_0, A)$, ($\mathscr{U}_0$ est le G-recouvrement trivial de X^2). On note $\overline{F(G, X, A)}$, $F(G, \mathscr{U}, A)$, $F(G, X, A)$, $E(G, \mathscr{U}, A)$ et $E(G, X, A)$ les ensembles des classes d'équivalence de $\overline{\mathscr{F}(G, X, A)}$, $\mathscr{F}(G, \mathscr{U}, A)$, $\mathscr{F}(G, X, A)$, $\mathscr{E}(G, \mathscr{U}, A)$ et $\mathscr{E}(G, X, A)$.

4. Cohomologie des espaces de transformation

4.1. Soient (G, Y) un espace de transformation et $\mathscr{V} = (V_i)_{i \in I}$ un G-recouvrement de Y. On dit qu'un morphisme c: $(i_0, ..., i_s, y) \to c_{i_0 \cdots i_s}(y)$, défini sur l'ouvert G-invariant des éléments de $I^{s+1} \times Y$ tels que $y \in \bigcap_k V_{i_k}$ $(0 \leqslant k \leqslant s)$, à valeurs dans A, est une cochaîne d'ordre s relativement à $\mathscr{V}$ (pour la cohomologie de Čech équivariante), si on a pour tout g de G,

$$c_{gi_0 \cdots gi_s}(gy) = gc_{i_0 \cdots i_s}(y).$$

Soit $C^s(G, Y, \mathscr{V}, A)$ le groupe abstrait des cochaînes d'ordre s et $(C^s(G, Y, \mathscr{V}, A)_{s \in \mathbb{N}})$ le complexe correspondant muni de la différentielle $\check{d}$ définie par

$$(\check{d}c)_{i_0 \cdots i_{s+1}}(y) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant s+1} (-1)^k c_{i_0 \cdots \hat{i}_k \cdots i_{s+1}}(y).$$

Dans le cas où $Y = X^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, on pose $C^{n,s}(G, \mathscr{V}, A) = C^s(G, X^{n+1}, \mathscr{V}, A)$ et on note $\check{Z}^{n,s}(G, \mathscr{V}, A)$, $\check{B}^{n,s}(G, \mathscr{V}, A)$ et $\check{H}^{n,s}(G, \mathscr{V}, A)$ le groupe des s-cocycles, des s-cobords et le $s$ième groupe de cohomologie du complexe correspondant. D'après 2.5, $\check{H}^{1,1}(G, \mathscr{U}, A)$ est en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalence de G-fibrés principaux de base X^2 qui admettent un système équivariant de sections relativement à $\mathscr{U}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}+1$, on va associer à $\mathscr{U}$ un G-recouvrement $d^{n-1}\mathscr{U}$ de X^{n+1}. Tout d'abord, soit $P(q+1, n+1)$ l'ensemble des applications strictement croissantes de $\{0, 1, ..., q\}$ dans $\{0, 1, ..., n\}$. Par exemple, si $b \in P(2, n+1)$, on a $b = (b(0), b(1))$ avec $0 \leqslant b(0) < b(1) \leqslant n$. Posons $d^{n-1}I = I^{P(2,n+1)} = I^{n(n+1)/2}$. A tout élément $b \in P(2, n+1)$ correspond un morphisme de projection $i \to i(b(0), b(1))$ de $d^{n-1}I$ dans I. On définit le G-recouvrement $d^{n-1}\mathscr{U}$ de X^{n+1}, indicé par $d^{n-1}I$ dont l'ouvert de définition dans $d^{n-1}I \times X^{n+1}$ est formé par les éléments $(i; x_0, ..., x_n)$ tels que $(x_{b(0)}, x_{b(1)}) \in U_{i(b(0), b(1))}$ pour tout $b \in P(2, n+1)$.

Afin de munir $(C^{n,s}(G, d^{n-1}\mathcal{U}, A))_{n\in\mathbb{N}+1}$ d'une structure de complexe de groupes abstraits de différentielle d, on associe à $i \in d^n I$ et à $\tau_k \in P(n+1, n+2)$ $(0 \leqslant k \leqslant n+2)$ tel que $\operatorname{Im}\tau_k = \{0, 1, ..., \hat{k}, ..., n+1\}$, l'élément $\overline{\tau_k} i \in d^{n-1}I$ défini par $\overline{\tau_k} i(p, q) = i(\tau_k(p), \tau_k(q))$ pour $0 \leqslant p < q \leqslant n$. Soit $m \in C^{n,s}(G, d^{n-1}\mathcal{U}, A)$, on définit $dm \in C^{n+1,s}(G, d^n\mathcal{U}, A)$ par

$$(dm)_{i_0 \cdots i_s}(x_0, ..., x_{n+1}) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n+1} (-1)^k m_{\bar{\tau}_k i_0 \cdots \bar{\tau}_k i_s}(x_0, ..., \hat{x}_k, ..., x_{n+1})$$

sur l'ouvert des éléments $(i_0, ..., i_s; x_0, ..., x_{n+1})$ de $(d^nI)^{s+1} \times X^{n+2}$ tels que

$$(x_{b(0)}, x_{b(1)}) \in U_{i_0(b(0),b(1))} \cap \cdots \cap U_{i_s(b(0),b(1))}, \qquad \forall b \in P(2, n+2).$$

On obtient le bicomplexe

$$\begin{tikzcd}
C^{1,0}(G, \mathcal{U}, A) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d"] & C^{2,0}(G, d\mathcal{U}, A) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d"] & C^{3,0}(G, d^2\mathcal{U}, A) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d"] & {} \\
C^{1,1}(G, \mathcal{U}, A) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d"] & C^{2,1}(G, d\mathcal{U}, A) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d"] & {} & \\
C^{1,2}(G, \mathcal{U}, A) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d"] & {} & & \\
{} & & &
\end{tikzcd}$$

Le complexe $(C^{n,0}(G, d^{n-1}\mathcal{U}_0, A))_{n\in\mathbb{N}+1}$ est canoniquement isomorphe au complexe noté $(C^n(G, X, A))_{n\in\mathbb{N}+1}$ qui a pour cochaînes d'ordre n les morphismes m de X^{n+1} dans A tels que $m(gx_0, ..., gx_n) = gm(x_0, ..., x_n)$ sur $G \times X^{n+1}$ et dont la différentielle est donnée par

$$dm(x_0, ..., x_{n+1}) = \sum_k (-1)^k m(x_0, ..., \hat{x}_k, ..., x_{n+1}).$$

On note $Z^n(G, d^{n-1}\mathcal{U}, A)$, $B^n(G, d^{n-1}\mathcal{U}, A)$ et $H^n(G, d^{n-1}\mathcal{U}, A)$ (resp. $Z^n(G, X, A)$, $B^n(G, X, A)$ et $H^n(G, X, A)$) les groupes des n-cocycles, des n-cobords et le $n$ième groupe de cohomologie du complexe $(C^{n,0}(G, d^{n-1}\mathcal{U}, A))_{n\in\mathbb{N}+1}$ (resp. $(C^n(G, X, A))_{n\in\mathbb{N}}$).

4.2. En particulier, un élément de $Z^2(G, d\mathcal{U}, A)$ est un morphisme m: $(i(01), i(12), i(02); x_0, x_1, x_2) \to m_{i(01)\, i(12)\, i(02)}(x_0, x_1, x_2)$ défini sur l'ouvert G-invariant des éléments de $dI \times X^3 = I^3 \times X^3$ tels que $(x_0, x_1) \in U_{i(01)}$, $(x_1, x_2) \in U_{i(12)}$ et $(x_0, x_2) \in U_{i(02)}$, à valeurs dans A. Il vérifie les relations

(a) $m_{gi(01), gi(12), gi(02)}(gx_0, gx_1, gx_2) = gm_{i(01)\, i(12)\, i(02)}(x_0, x_1, x_2)$

$$\begin{aligned}(b)\quad & dm_{i(01)\,i(02)\,i(03)\,i(12)\,i(13)\,i(23)}(x_0, x_1, x_2, x_3)\\ &= m_{i(12)\,i(23)\,i(13)}(x_1, x_2, x_3) - m_{i(02)\,i(23)\,i(03)}(x_0, x_2, x_3)\\ &\quad + m_{i(01)\,i(13)\,i(03)}(x_0, x_1, x_3) - m_{i(01)\,i(12)\,i(02)}(x_0, x_1, x_2) = 0\end{aligned}$$

sur l'ouvert des éléments de $d^2I \times X^4$ tels que $(x_p, x_q) \in U_{i(pq)}$, $0 \leqslant p < q \leqslant 3$.
La condition $m = dn \in B^2(G, d\mathscr{U}, A)$ signifie que

$$m_{i(01)\,i(12)\,i(02)}(x_0, x_1, x_2) = n_{i(01)}(x_0, x_1) + n_{i(12)}(x_1, x_2) - n_{i(02)}(x_0, x_2).$$

4.3. Soit $(\tilde{G}, \tilde{X}, s) \in \mathscr{E}(G, \mathscr{U}, A)$. On lui associe l'élément $m = \phi(\tilde{G}, \tilde{X}, s)$ de $Z^2(G, d\mathscr{U}, A)$ défini par

$$m_{i_0 i_1 i_2}(x_0, x_1, x_2) = -s_{i_0}(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1) - s_{i_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + s_{i_2}(\tilde{x}_0, \tilde{x}_2). \tag{4.3.1}$$

Soit c le système équivariant de fonctions de transition naturel relativement à $\mathscr{U}$ pour le G-fibré principal $\tilde{X} \boxtimes \tilde{X}$, défini par

$$c_{i'i}(x_0, x_1) = -s_{i'}(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1) + s_i(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1). \tag{4.3.2}$$

On a $\check{d}m = dc$. Autrement dit

$$\begin{aligned}& m_{i'_0 i'_1 i'_2}(x_0, x_1, x_2) - m_{i_0 i_1 i_2}(x_0, x_1, x_2)\\ &= c_{i'_0 i_0}(x_0, x_1) + c_{i'_1 i_1}(x_1, x_2) - c_{i'_2 i_2}(x_0, x_2).\end{aligned}$$

Désormais, on désigne par $\mathscr{U}(O) = (U(O)_i)_{i \in I}$ (resp. $\mathscr{U}(O)^* = (U(O)_i^*)_{i \in I}$) le recouvrement de X (resp. de G) défini par

$$\begin{aligned}U(O)_i &= \{x \in X \mid (O, x) \in U_i\}\\ U(O)_i^* &= \{g \in G \mid (O, gO) \in U_i\}.\end{aligned}$$

On a un système de sections $\sigma(O)$ (resp. $\sigma(O)^*$) relativement au recouvrement $\mathscr{U}(O)$ (resp. $\mathscr{U}(O)^*$) pour le fibré principal $\tilde{X}$ (resp. $\tilde{G}$), défini par

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= s_i(\tilde{O}, \tilde{x}) + \sigma(O)_i(x)\\ \tilde{g} &= s_i(\tilde{O}, \tilde{g}\tilde{O}) + \sigma(O)_i^*(g).\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Le système de fonctions de transition $c(O)$ (resp. $c(O)^*$) associé à $\sigma(O)$ (resp. $\sigma(O)^*$) est caractérisé par la formule

$$c(O)_{i'i}(x) = c_{i'i}(O, x); \qquad \text{resp. } c(O)^*_{i'i}(g) = c_{i'i}(O, gO). \tag{4.3.4}$$

Comme dans 2.5, on lui associe la famille d'isomorphismes $(\beta_i)_{i\in I_r}$ (resp. $(\beta'_i)_{i\in I_r}$) de $A\times U(O)_i$ (resp. $A\times U(O)_i^*$) dans $\pi^{-1}(U(O)_i)$ (resp. $\pi'^{-1}(U(O)_i^*)$). On pose

$$(a, i, x)=\beta_i(a, x) \qquad \text{et} \qquad (a, i, g)=\beta'_i(a, g). \tag{4.3.5}$$

On a pour $\tilde{x}\in\pi^{-1}(U(O)_i)$ et $\tilde{g}\in\pi'^{-1}(U(O)_i^*)$

$$\tilde{x}=(s_i(\tilde{O}, \tilde{x}), i, x) \qquad \text{et} \qquad \tilde{g}=(s_i(\tilde{O}, \tilde{g}\tilde{O}), i, g). \tag{4.3.6}$$

4.4. LEMME. *Soient i, i', i'' des éléments fixes de I_r. Sur des ouverts convenablement définis, on a les formules*

(a) $(a, i, g)(a', i', g')=(a+ga'+m_{i,gi',i''}(O, gO, gg'O), i'', gg')$.

(b) $\tilde{e}=(-m_{iii}(O, O, O), i, e)$.

(c) $(a, i, g)(a', i', x)=(a+ga'+m_{i,gi',i''}(O, gO, gx), i'', gx)$.

(d) $s_{i''}((a, i, x), (a', i', x'))=a'-a-m_{ii''i'}(O, x, x')$.

Preuve. Prouvons le (d) par exemple. Il découle de la formule

$$s_{i''}(\tilde{x}, \tilde{x}')=s_{i'}(\tilde{O}, \tilde{x}')-s_i(\tilde{O}, \tilde{x})-m_{ii''i'}(O, x, x'). \quad \blacksquare$$

4.5. THÉORÈME. *L'application ϕ de $E(G, \mathcal{U}, A)$ dans $Z^2(G, d\mathcal{U}, A)$ définie par* (4.3.1) *est une bijection.*

Preuve. Jusqu'à la fin de la démonstration, on convient que les lettres indicées y et j désignent des éléments fixes de X_r et de I_r. Pour prouver l'injectivité de ϕ, on remarque que la connaissance de m implique celle de c car d'après (4.3.2), lorsque $(i'_0, i_0; x_0, x_1)$ décrit un ouvert convenable de $I^2\times X^2$, on a

$$c_{i'_0 i_0}(x_0, x_1)=m_{i'_0 j_1 j_2}(x_0, x_1, y_2)-m_{i_0 j_1 j_2}(x_0, x_1, y_2).$$

La structure de fibré principal de $\tilde{X}$ et de $\tilde{G}$ est fixée par la connaissance de $c(O)$ et de $c(O)^*$ grâce aux formules (4.3.4). La loi de composition de $\tilde{G}$ et son action sur $\tilde{X}$ sont alors déterminées par le lemme 4.4. Pour prouver la surjectivité de ϕ, on utilise le

4.6. LEMME. *L'homomorphisme de groupes abstraits d_0 de $\check{Z}^{1,1}(G, \mathcal{U}, A)$ dans $\check{Z}^{2,1}(G, d\mathcal{U}, A)\cap \operatorname{Ker} d$, obtenu par restriction à $\check{Z}^{1,1}(G, \mathcal{U}, A)$ de d: $C^{1,1}(G, \mathcal{U}, A)\to C^{2,1}(G, d\mathcal{U}, A)$ est un isomorphisme. Par conséquent, on a un unique homomorphisme de groupes abstraits θ de $Z^2(G, d\mathcal{U}, A)$ dans*

$\check{Z}^{1,1}(G, \mathscr{U}, A)$ *tel que* $\check{d}m = d\theta(m)$, *ou de façon équivalente, tel que le diagramme ci-dessous commute*

$$\begin{tikzcd}
C^{1,0}(G, \mathscr{U}, A) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d"'] & Z^2(G, d\mathscr{U}, A) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d"] \arrow[dl, "\theta"'] & 0 \\
\check{Z}^{1,1}(G, \mathscr{U}, A) \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d"'] & \check{Z}^{2,1}(G, d\mathscr{U}, A) \cap \operatorname{Ker} d & \\
{} & &
\end{tikzcd}$$

Preuve. Prouvons l'injectivité de d_0. Soit $c \in \check{Z}^{1,1}(G, \mathscr{U}, A)$ tel que $dc = 0$. Lorsque $(i(01)', i(01); x_0, x_1)$ décrit un ouvert convenable de $I^2 \times X^2$, on a

$$c_{i(01)'i(01)}(x_0, x_1) - c_{j(02)j(02)}(x_0, y_2) + c_{j(12)j(12)}(x_1, y_2) = 0.$$

Comme $\check{d}c = 0$, les derniers termes de l'égalité sont nuls et $c = 0$.

Prouvons la surjectivité de d_0. Soit $t \in \check{Z}^{2,1}(G, d\mathscr{U}, A)$ tel que $dt = 0$. Lorsque $(i(13), i(13)', x_1, x_3)$ décrit un ouvert convenable de $I^2 \times X^2$, on a

$$dt_{j(01)j(02)j(03)j(12)i(13)'j(23), j(01)j(02)j(03)j(12)i(13)j(23)}(y_0, x_1, y_2, x_3) = 0.$$

En utilisant cette formule ainsi que d'autres obtenues de façon identique et le fait que $\check{d}t = 0$, on obtient sur des ouverts convenables

$$\begin{aligned}
&t_{j(01)i(13)'j(03), j(01)i(13)j(03)}(y_0, x_1, x_3) \\
&\quad = -t_{j(12)j(23)i(13)', j(12)j(23)i(13)}(x_1, y_2, x_3) \\
&\quad = t_{i(13)'j(34)j(14), i(13)j(34)j(14)}(x_1, x_3, y_4).
\end{aligned}$$

On a donc un élément c de $\check{Z}^{1,1}(G, \mathscr{U}, A)$ qui vérifie sur un ouvert convenable

$$c_{i(13)'i(13)}(x_1, x_3) = t_{j(01)i(13)'j(03), j(01)i(13)j(03)}(y_0, x_1, x_3).$$

On a alors successivement

$$\begin{aligned}
&dt_{i(01)'i(02)'j(03)i(12)'j(13)j(23), i(01)i(02)j(03)i(12)j(13)j(23)}(x_0, x_1, x_2, y_3) = 0 \\
&t_{i(01)'i(12)'i(02)', i(01)i(12)i(02)}(x_0, x_1 x_2) \\
&\quad = c_{i(01)'i(01)}(x_0, x_1) + c_{i(12)'i(12)}(x_1, x_2) - c_{i(02)'i(02)}(x_0, x_2).
\end{aligned}$$

Ceci prouve le lemme. Donnons-nous $m \in Z^2(G, d\mathscr{U}, A)$ et $c = \theta(m)$.

Soit maintenant $c(O)$ (resp. $c(O)^*$) le système de fonctions de transition relativement à $\mathscr{U}(O)$ (resp. $\mathscr{U}(O)^*$) déterminé par les formules (4.3.4).

Soient $\tilde{X}$ (resp. $\tilde{G}$) les fibrés principaux correspondants. Des calculs longs mais sans surprises permettent de vérifier que les formules du lemme 4.4 munissent $(\tilde{G}, \tilde{X})$ d'une structure d'extension de (G, X) par A avec s pour fonction de Maslov, de telle sorte que $(\tilde{G}, \tilde{X}, s) \in E(G, \mathscr{U}, A)$ et que $\phi(\tilde{G}, \tilde{X}, s) = m$. ▮

4.7. On peut décrire cohomologiquement l'extension $\tilde{G}$ de G par A à l'aide d'un cocycle m' du type précédent relativement à un G-recouvrement $\mathscr{U}' = (U'_l)_{l \in L}$ de G^2 tel que l'action de G sur L soit triviale. Pour cela, on choisit $L = I \times X$, et on pose successivement

$$\mathbf{U}' = \{(l, g, g') \in L \times G^2 \mid l = (i, x),\ (gi, gx, g'x) \in \mathbf{U}\}$$

$$U'_l = \{(g, g') \in G^2 \mid (gx, g'x) \in U_{gi}\} \qquad \text{avec} \quad l = (i, x).$$

On a une fonction de Maslov s' pour $\tilde{G}$ relativement à $\mathscr{U}'$ donnée par

$$s'_l(\tilde{g}, \tilde{g}') = s_{gi}(\tilde{g}\tilde{x}, \tilde{g}'\tilde{x}).$$

Posant $m' = \phi(\tilde{G}, s')$, on a

$$m'_{l_0 l_1 l_2}(g_0, g_1, g_2) = -s_{g_0 i_0}(\tilde{g}_0 \tilde{x}_0, \tilde{g}_1 \tilde{x}_0) - s_{g_1 i_1}(\tilde{g}_1 x_1, \tilde{g}_2 \tilde{x}_1) + s_{g_0 i_2}(\tilde{g}_0 \tilde{x}_2, \tilde{g}_2 \tilde{x}_2). \tag{4.7.1}$$

5. Propriétés fonctorielles et limites inductives

On continue à supposer que $(\tilde{G}, \tilde{X}, s)$ est un élément de $\mathscr{E}(G, \mathscr{U}, A)$ associé à $m \in Z^2(G, d\mathscr{U}, A)$. Soit $\varphi: A \to A'$ un morphisme de G-modules. On définit l'élément $\varphi(m)$ de $Z^2(G, d\mathscr{U}, A')$ tel que $\varphi(m)_{i_0 i_1 i_2}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(m_{i_0 i_1 i_2}(x_0, x_1, x_2))$. On dit que le morphisme d'espaces de transformation $(\varphi', \varphi): (\tilde{G}, \tilde{X}) \to (\tilde{G}', \tilde{X}')$ est un morphisme d'extensions associé à $\varphi: A \to A'$ si $\varphi: \tilde{X} \to \tilde{X}'$ et $\varphi': \tilde{G} \to \tilde{G}'$, sont des morphismes de fibrés principaux. Deux tels morphismes (φ'_1, φ_1) et (φ'_2, φ_2) sont dits équivalents si $\varphi'_1 = \varphi'_2$ et s'il existe $a \in A'_r$ tel que $\varphi_2(\tilde{x}) = a + \varphi_1(\tilde{x})$.

5.1. Proposition. *Soit $(\tilde{G}', \tilde{X}', s') \in \mathscr{E}(G, \mathscr{U}, A')$, avec $m' = \phi(\tilde{G}', \tilde{X}', s')$. L'ensemble (vide en général) des classes d'équivalence des morphismes d'extension (φ', φ) de $(\tilde{G}, \tilde{X})$ dans $(\tilde{G}', \tilde{X}')$ associés à $\varphi: A \to A'$ est en bijection avec l'espace affine attaché au groupe abstrait $Z^1(G, \mathscr{U}, A')$ des éléments n de $C^1(G, \mathscr{U}, A')$ tels que $dn = m' - \varphi(m)$. Cette bijection est caractérisée par la formule*

$$n_i(x_0, x_1) = -s'_i(\varphi(\tilde{x}_0), \varphi(\tilde{x}_1)) + \varphi(s_i(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1)). \tag{5.1.1}$$

Preuve. Il est clair que (5.1.1) permet de définir une application injective $(\varphi', \varphi) \to n$ vérifiant les conditions de la proposition. Montrons qu'elle est surjective. Soit n tel que $dn = m' - \varphi(m)$. Les formules (4.3.3) à (4.3.6) permettent d'écrire tout élément $\tilde{x} \in \tilde{X}$ et $\tilde{g} \in \tilde{G}$ sous la forme (a, i, x) et (a, i, g). En choisissant un élément $\tilde{O}'$ de $\tilde{X}'$ qui se projette en O sur X et en appliquant les mêmes conventions, on peut aussi écrire les éléments de $\tilde{X}'$ et de $\tilde{G}'$ sous la forme (a', i, x) et (a', i, g). En utilisant les résultats de la section 4, en particulier le lemme 4.4, on vérifie qu'on a un morphisme d'extensions (φ', φ) de $(\tilde{G}, \tilde{X})$ dans $(\tilde{G}', \tilde{X}')$ donné par

$$\begin{aligned} \varphi'(a, i, g) &= (\varphi(a) - n_i(O, gO), i, g \\ \varphi(a, i, x) &= (\varphi(a) - n_i(O, x), i, x). \quad \blacksquare \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

Choisissant $A' = A$ et $\varphi = \mathrm{Id}_A$, on voit que $(\tilde{G}', \tilde{X}')$ et $(\tilde{G}, \tilde{X})$ sont équivalents dans $\mathscr{F}(G, \mathscr{U}, A)$ si et seulement si $m' - m \in B^2(G, d\mathscr{U}, A)$. D'où le

5.2. COROLLAIRE. *La bijection ϕ de $E(G, \mathscr{U}, A)$ dans $Z^2(G, d\mathscr{U}, A)$ induit par quotient une bijection (notée encore ϕ) de $F(G, \mathscr{U}, A)$ dans $H^2(G, d\mathscr{U}, A)$.*

5.3. Soient maintenant deux G-recouvrements $\mathscr{U}^{(p)}$ indicé par $I^{(p)}$ $(p = 1, 2)$ d'un espace de transformation (G, Y), admettant $\mathrm{U}^{(p)}$ pour ouvert de définition dans $I^{(p)} \times Y$. On dit que $\mathscr{U}^{(1)}$ est plus fin que $\mathscr{U}^{(2)}$ par un morphisme $\rho: I^{(1)} \to I^{(2)}$ tel que $\rho(gi) = g\rho(i)$ sur $G \times I^{(1)}$, si on a $(\rho \times Id_Y)(\mathrm{U}^{(1)}) \subseteq \mathrm{U}^{(2)}$. La famille des G-recouvrements est filtrante à droite: si $\mathscr{U}^{(1)}$ et $\mathscr{U}^{(2)}$ sont quelconques, le G-recouvrement $\mathscr{U}^{(3)}$ indicé par $I^{(3)} = I^{(1)} \times I^{(2)}$ et admettant $\mathrm{U}^{(3)}$ ci-dessous comme ouvert de définition est plus fin que $\mathscr{U}^{(1)}$ et $\mathscr{U}^{(2)}$ par les projections de $I^{(3)}$ sur $I^{(1)}$ et sur $I^{(2)}$,

$$\mathrm{U}^{(3)} = \{(i_1, i_2; y) \in I^{(3)} \times Y \mid (i_1, y) \in \mathrm{U}^{(1)}, (i_2, y) \in \mathrm{U}^{(2)}\}.$$

Nous supposons maintenant que $\mathscr{U}$ est plus fin que le G-recouvrement $\mathscr{U}'$ de X^2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $d^n\mathscr{U}$ est alors plus fin que $d^n\mathscr{U}'$. On a des injections de restriction, notées R, de $F(G, \mathscr{U}', A)$ dans $F(G, \mathscr{U}, A)$. De même, on a par restriction, des homomorphismes de groupes abstraits (encore notés R) de $C^{n,s}(G, d^{n-1}\mathscr{U}', A)$ dans $C^{n,s}(G, d^{n-1}\mathscr{U}, A)$ définis par $R(c)_i = c_{\rho(i)}$. Si on choisit $\mathscr{U}' = \mathscr{U}_0$, on voit que

$$\mathrm{Im}\{R: C^n(G, X, A) \to C^{n,0}(G, d^{n-1}\mathscr{U}, A)\} = \check{Z}^{n,0}(G, d^{n-1}\mathscr{U}, A) \tag{5.3.1}$$

Les homomorphismes R ainsi obtenus qui conmutent avec d et $\check{d}$ respectent toutes les familles de groupes indexés par $\mathscr{U}$ construites plus haut. Ils induisent des homomorphismes de groupes, systématiquement notés R. On a par exemple,

$$H^2(G, X, A) \xrightarrow{R} H^2(G, d\mathcal{U}', A) \xrightarrow{R} H^2(G, d\mathcal{U}, A) \xrightarrow{R} \overline{H^2(G, X, A)}$$
$$= \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathcal{U}}} \operatorname{ind} H^2(G, d\mathcal{U}, A).$$

La bijection naturelle ϕ de $F(G, \mathcal{U}, A)$ sur $H^2(G, d\mathcal{U}, A)$ induit par limite inductive une bijection de $\overline{F(G, X, A)}$ sur $\overline{H^2(G, X, A)}$ toujours notée ϕ. On a le diagramme commutatif ci-dessous pour lequel les flèches horizontales (resp. verticales) sont des bijections (resp. des injections)

$$\begin{tikzcd}
F(G, X, A) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "R"] & H^2(G, X, A) \arrow[d, "R"] \\
F(G, \mathcal{U}, A) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "R"] & H^2(G, d\mathcal{U}, A) \arrow[d, "R"] \\
\overline{F(G, X, A)} \arrow[r, "\phi"] & \overline{H^2(G, X, A)}
\end{tikzcd}$$

5.4. PROPOSITION. (1) Soit $(\tilde{G}, \tilde{X}, s) \in E(G, \mathcal{U}, A)$ *avec* $m = \phi(\tilde{G}, \tilde{X}, s)$; *les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *le G-fibré principal* $\tilde{X}^{\cdot\cdot} \boxtimes \tilde{X}$ *possède une section G-invariante globale au-dessus de* X^2 (*autrement dit*, $(\tilde{G}, \tilde{X}) \in R(F(G, X, A))$).

(ii) $\phi(\tilde{G}, \tilde{X}) \in R(H^2(G, X, A))$.

(iii) $\theta(m) \in \check{B}^{1,1}(G, \mathcal{U}, A)$ (θ *a été défini dans le lemme* 4.6).

(2) *Pour que ces conditions soient réalisées, il est nécessaire* (*et lorsque* $\mathscr{C}$ *est la catégorie des espaces discrets, suffisant*) *que pour tout* $\tilde{g} \in \tilde{G}$ *et tout* $\tilde{x}_p \in \tilde{X}$, $p = 1, 2$, *les égalités* $\tilde{g}\tilde{x}_p = a_p + \tilde{x}_p$ *entraînent que* $a_1 = a_2$.

(3) *Lorsque* $\mathscr{C}$ *est la catégorie des espaces discrets* $R(F(G, A)) = \overline{F(G, A)}$.

Preuve. (1) L'équivalence de (i) et de (ii) découle du diagramme ci-dessus. Montrons que (i) $\Leftrightarrow$ (iii), on voit que $(\tilde{G}, \tilde{X}) \in R(F(G, X, A))$ si et seulement si, il existe une fonction de Maslov s', avec $m' = \phi(\tilde{G}, \tilde{X}, s')$ tel que $\check{d}m' = 0$. D'après la proposition 5.1 et (5.3.1), cela est possible si et seulement si, il existe $n \in C^1(G, \mathcal{U}, A)$ vérifiant $\check{d}(m - dn) = 0$. D'après le lemme 4.6, cela revient à dire que $d\theta(m) = d\check{d}n$, puis que $\theta(m) = \check{d}n \in \check{B}^{1,1}(G, \mathcal{U}, A)$.

Le (2) et le (3) sont démontrés dans [7, proposition 2.5]. ∎

5.5. Supposons provisoirement que $\mathscr{C}$ soit la catégorie des variétés différentiables. Nous nous intéressons aux extensions $\tilde{G}$ du groupe de Lie

G. Soit V un ouvert contractile de G. Choisissons $I = G$ muni de la topologie discrète et supposons l'action de G sur I triviale. Posons

$$\mathbf{U}' = \{(i, g, g') \in I \times G^2 \mid g^{-1} g' i^{-1} \in V\}.$$

On voit que $\mathbf{U}'$ est l'ouvert de définition d'un G-recouvrement $\mathscr{U}'$ de G^2. Pour toute extension $\tilde{G}$ de G et tout $i \in I$, on a une section σ_i dans $\tilde{G}$ au-dessus de Vi. On définit la fonction de Maslov s' pour $\tilde{G}$ relativement à $\mathscr{U}'$ par

$$s'_i\ (\tilde{g}, \tilde{g}') + \sigma_i(g^{-1} g') = \tilde{g}_{-1} \tilde{g}'$$

de telle sorte que $(\tilde{G}, s') \in \mathscr{E}(G, d\mathscr{U}', A)$. On déduit de ces remarques que $R(H^2(G, d\mathscr{U}', A)) = \overline{H^2(G, A)}$. Ces résultats sont une simple reformulation de ceux de Cathelineau [1, section 2].

5.6. On se donne maintenant les G-modules A_0, A et A_1 et un morphisme de G-modules $\varphi: A \to A_1$, tel que (A, φ, A_1, A_0) soit un G-fibré principal d'espace total A, de projection φ, de base A_1 et de groupe structural A_0. L'homomorphisme injectif naturel $\imath: a_0 \mapsto a_0 + 0$ de A_0 dans A permet d'identifier A_0 au sous-groupe $\imath(A_0)$ de A. On a la suite exacte de G-modules

$$0 \to A_0 \to A \to A_1 \to 0.$$

Soient $(\tilde{G}_0, \tilde{X}_0)$ un élément de $\overline{\mathscr{F}(G, X, A_0)}$ et $(\imath', \imath): (\tilde{G}_0, \tilde{X}_0) \to (\tilde{G}, \tilde{X})$ un morphisme d'extension associé à $\imath: A_0 \to A$. Du fait que pour tout objet U, $\imath(A_0) \times U$ est un sous-objet de $A \times U$, on déduit que $(\imath', \imath)$ permet d'identifier $(\tilde{G}_0, \tilde{X}_0)$ à son image $(\imath'(\tilde{G}_0), \imath(\tilde{X}_0))$ qui est un sous-espace de transformation de $(\tilde{G}, \tilde{X})$.

On dira donc que le sous-espace de transformation $(\tilde{G}_0, \tilde{X}_0)$ de $(\tilde{G}, \tilde{X})$ est une réduction de $(\tilde{G}, \tilde{X})$ par $\imath$, si $(\tilde{G}_0, \tilde{X}_0) \in \overline{\mathscr{F}(G, X, A_0)}$ et si l'injection canonique $(\imath', \imath)$ de $(\tilde{G}_0, \tilde{X}_0)$ dans $(\tilde{G}, \tilde{X})$ est un morphisme d'extension associé à $\imath: A_0 \to A$.

5.7. Proposition. *On a une bijection naturelle $(\tilde{G}_0, \tilde{X}_0) \mapsto n$ de l'ensemble (vide en général) des réductions de $(\tilde{G}, \tilde{X})$ par $\imath: A_0 \to A$, telles que $\tilde{O} \in \tilde{X}_0$, dans l'espace affine attaché au groupe $Z^1(G, \mathscr{U}, A_1)$ des éléments n de $C^1(G, \mathscr{U}, A_1)$ vérifiant $dn = \varphi(m)$, de telle sorte que*

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0 &= \{(a, i, g) \in \tilde{G} \mid \varphi(a) = -n_i(O, gO)\} \\ \tilde{X}_0 &= \{(a, i, x) \in \tilde{X} \mid \varphi(a) = -n_i(O, x)\}. \end{aligned} \tag{5.7.1}$$

Preuve. Notons $(\tilde{G}_1, \tilde{X}_1, s_1)$ un élément de $\mathscr{E}(G, \mathscr{U}, A_1)$ tel que $\phi(\tilde{G}_1, \tilde{X}_1, s_1) = \varphi(m)$. On a un morphisme d'extensions naturel (φ', φ): $(\tilde{G}, \tilde{X}) \to (\tilde{G}_1, \tilde{X}_1)$ associé à $\varphi: A \to A_1$, donné par (5.1.1) en prenant $n = 0$. Soit maintenant un G-recouvrement $\mathscr{U}'$ de X^2 plus fin que $\mathscr{U}$. D'après ce qui précède et la proposition 5.1, la donnée d'un élément $(\tilde{G}_0, \tilde{X}_0, s_0)$ de $\mathscr{E}(G, \mathscr{U}', A_0)$ tel que $(\tilde{G}_0, \tilde{X}_0)$ soit une réduction de $(\tilde{G}, \tilde{X})$ par ι, est équivalente à celle d'un couple (m_0, p) avec $m_0 \in Z^2(G, d\mathscr{U}', A_0)$, $p \in C^1(G, \mathscr{U}', A)$ et $dp = m - m_0$.

Lorsque ces conditions sont réalisées, on va voir que $(\tilde{G}_0, \tilde{X}_0)$ est défini par les formules (5.7.1) en prenant $n = \varphi(p)$: le morphisme $(\varphi' \circ \iota', \varphi \circ \iota)$ de $(\tilde{G}_0, \tilde{X}_0)$ dans $(\tilde{G}_1, \tilde{X}_1)$ est associé par la proposition 5.1 à un élément n de $C^1(G, \mathscr{U}, A_1)$ tel que $\varphi(m) - \varphi(m_0) = \varphi(m) = dn$. On vérifie que $n = \varphi(p)$ puis, en utilisant (5.1.2), que $\varphi'(\tilde{G}_0)$ (resp. $\varphi(\tilde{X}_0)$) est formé par les éléments de $\tilde{G}_1$ (resp. $\tilde{X}_1$) qui s'écrivent sous la forme $(-n_i(O, gO), i, g)$ (resp. $(-n_i(O, x), i, x)$). On déduit alors (5.7.1) du fait que $\tilde{G}_0 = \varphi'^{-1}[\varphi'(\tilde{G}_0)]$ (resp. $\tilde{X}_0 = \varphi^{-1}[\varphi(\tilde{X}_0)]$). Tout ceci montre l'injectivité de l'application $(\tilde{G}_0, \tilde{X}_0) \to n$.

Pour vérifier sa surjectivité, il suffit de constater que si $n \in C^1(G, \mathscr{U}, A_1)$ avec $\varphi(m) = dn$, il existe un recouvrement $\mathscr{U}'$ plus fin que $\mathscr{U}$, $m_0 \in Z^2(G, \mathscr{U}', A_0)$ et $p \in C^1(G, \mathscr{U}', A_0)$ tels que $m - m_0 = dp$ et $\varphi(p) = n$. Pour le voir, on se donne un système équivariant de sections σ' dans le G-fibré A, relativement à un G-recouvrement $\mathscr{V}$ de A_1 indicé par J. On considère le morphisme $(j, i, x, x') \to (j, n_i(x, x'))$ de $J \times \mathbf{U}$ dans $J \times A_1$ et on note $\mathbf{U}'$ l'ouvert de $(J \times I) \times X^2$ obtenu en prenant l'image réciproque par ce morphisme de l'ouvert de définition de $\mathscr{V}$ dans $J \times A_1$.

On voit que $\mathbf{U}'$ est l'ouvert de définition d'un G-recouvrement $\mathscr{U}'$ de X^2 indicé par $J \times I$ et plus fin que $\mathbf{U}$. On pose $p_{(ji)}(x, x') = \sigma'_j(n_i(x\, x'))$. Par construction $\varphi(p) = n$ et $\varphi(m - dp) = 0$, donc $m - dp \in Z^2(G, \mathscr{U}', A_0)$ comme prévu. ∎

6. La catégorie $\mathscr{C}$ des k-variétés algébriques

6.1. Soient K un corps algébriquement clos, k un sous-corps de K. Le but de cette section est d'introduite la catégorie des k-variétés algébrique sur K qui vérifie les axiomes (1) à (7) de 1.1 et de fournir des règles de calcul pratiques permettant de manier ses objets. Elle est isomorphe à une sous-catégorie des k-schémas. Notre exposé est une simple mise au point de l'esquisse donnée par Humphreys dans [15, section 34.1]. Il se justifie par l'absence de référence adaptée à notre point de vue, le formalisme des k-schémas étant trop général pour l'esprit géométrique de notre approche. On pourra cependant consulter [11, 13] sur le sujet. Ce qui suit sera utilisé lorsque nous étudierons, dans l'article suivant, les propriétés algébriques des variétés de spineurs purs. Nous ne fournissons pas de démonstration, mais nous renvoyons à des références contenant des raisonnements similaires utilisés dans des contextes souvent différents.

Si A est un k-espace vectoriel (resp. une k-algèbre), on convient de poser $A_K = A \otimes_k K$. Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(X', \mathcal{O}_{X'})$ des faisceaux d'anneaux de K-fonctions de base X et X'. Nous considérerons les applications continues $\varphi\colon X \to X'$ telles que pout tout ouvert U de X'

$$f \in \mathcal{O}_{X'}(U) \Rightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U)). \tag{6.1.1}$$

Soit $M(X)$ une k-algèbre de K-fonctions sur un ensemble X, qui contient la fonction constante égale à 1. A toute partie Y de X, on associe les idéaux $\mathcal{I}(Y)$ de $M(X)$ et $\mathcal{I}_K(Y)$ de $M(X)_K$ formés par les fonctions qui s'annulent sur Y. Si I est une partie de $M(X)_K$, on note $\mathcal{V}(I)$ l'ensemble des zéros communs à tous ses éléments.

Lorsque I décrit l'ensemble des idéaux de $M(X)$, les $\mathcal{V}(I)$ sont les fermés d'une topologie pour X. On peut alors associer à $M(X)$ un faisceau $(X, \mathcal{O}_X)$ de k-algèbres de K-fonctions sur X de telle sorte que pour tout ouvert U de X, les éléments de $\mathcal{O}_X(U)$ soient les fonctions f qui peuvent s'écrite sous la forme $f(x) = p(x)/q(x)$ avec p, $q \in M(X)$ sur un voisinage V de tout point x de U. Il est clair que $M(X)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{O}_X(X)$.

Si $M(X')$ est une seconde k-algèbre de fonctions de ce type, associée au faisceau $(X', \mathcal{O}_{X'})$ et si $\varphi\colon X \to X'$ est tel que pour tout $f \in M(X')$, $f \circ \varphi \in M(X)$, alors φ vérifie (6.1.1).

6.2. Soit $\mathcal{A}'$ la catégorie des k-algèbres A à unité qui possèdent un nombre fini de générateurs et telles que A_K soit réduite, i.e., ne possède pas d'éléments nilpotents. Rappelons en passant que A_K est réduite dès que A l'est, lorsque k est un corps parfait, en particulier lorsque k est fini ou de caractéristique zéro (voir [12, AV. 119]). On associe à A, l'ensemble $X = \operatorname{Specm} A_K$ des idéaux maximaux de A_K. D'après le Nullstellensatz faible de Hilbert, pour tout x de X, l'application canonique $K \to A_K/x$ est un isomorphisme de corps. On peut donc associer à $F \in A$, une K-fonction $\bar{F}$ sur X, définie par $\bar{F}(x) = F \otimes_k 1_K \pmod{x}$. Le Nullstellensatz de Hilbert entraîne que la correspondance $F \mapsto \bar{F}$ est injective et que son image est une k-algèbre $M(X)$ de K-fonctions, isomorphe à A. Par exemple, pour $A = k[T_1, ..., T_n]$, on a $X = K^n$ et $M(X)$ est l'algèbre des fonctions polynômiales à coefficients dans k sur K^n.

Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ le faisceau associé à $M(X)$ par la construction ci-dessus. Alors, du fait que A est noethérien, la topologie sous-jacente de X, appelée k-topologie de Zariski, est noethérienne. Par ailleurs une utilisation répétée du Nullstellensatz permet de démontrer que $M(X) = \mathcal{O}_X(X)$ (adapter [14, II.2.2]).

Soit $(\phi: A' \to A) \in \operatorname{Mor} \mathcal{A}'$ avec $X' = \operatorname{Specm} A'_K$. On a une application $\tilde{\phi}: X \to X'$ définie par $\tilde{\phi}(x) = \phi^{-1}(x)$ (voir [16, p. 84]). Pour $F \in A'$, on a $\overline{\phi(F)}(x) = \bar{F} \circ \tilde{\phi}(x)$, par conséquent $\tilde{\phi}$ vérifie la propriété (6.1.1). Réciproquement, du fait que $M(X) = \mathcal{O}_X(X)$, toute application $\varphi: X \to X'$ qui vérifie (6.1.1) s'écrit sous la forme $\tilde{\phi}$. Les correspondances $A \mapsto (X, \mathcal{O}_X)$ et $\phi \mapsto \tilde{\phi}$ définissent donc un foncteur contravariant bijectif de $\mathcal{A}'$ dans ce qu'on appelle la catégorie $\mathcal{A}$ des k-variétés affines, dont les objets sont les espaces topologiques X munis d'un faisceau $\mathcal{O}_X$ de k-algèbres de K-fonctions qui vérifient les propriétés ci-dessous, avec $M(X) = \mathcal{O}_X(X)$,

(1) La fonction constante égale à 1 est un élément de $M(X)$, et $M(X)$ est de type fini.

(2) La correspondance $x \mapsto \mathcal{I}_K(x)$ définit une bijection de X dans $\operatorname{Specm} M(X)_K$.

(3) L'ensemble des fermés de X coïncide avec l'ensemble des $\mathcal{V}(I)$ tels que I soit un idéal de $M(X)$.

(4) Les sections du faisceau sont des K-fonctions qui peuvent s'écrire localement sous la forme d'un quotient d'éléments de $M(X)$.

Les $\mathcal{A}$-morphismes $\varphi: (X, \mathcal{O}_X) \to (X', \mathcal{O}_{X'})$ sont les applications telles que $f \circ \varphi \in M(X)$ dès que $f \in M(X')$, ou de façon équivalente, qui vérifient (6.1.1). Par exemple, les applications polynômiales à coefficients dans k pour $X = K^n$ et $X' = K^{n'}$ correspondent aux $\mathcal{A}$-morphismes.

La catégorie $\mathcal{A}$ vérifie les axiomes (5) à (7) de 1.1. Tout d'abord, le $\mathcal{A}'$-morphisme naturel $k \to A$ correspond à un $\mathcal{A}$-morphisme structural $(X, \mathcal{O}_X) \to (S, \mathcal{O}_S)$ avec $S = \operatorname{Specm} k$ et $\mathcal{O}_S(S) = k$. Par ailleurs, le produit tensoriel est un coproduit pour $\mathcal{A}'$ qui donne un produit $\times$ dans $\mathcal{A}$. Enfin, l'ensemble sous-jacent à $X \times X'$ est isomorphe au produit ensembliste de X par X' puisque $\operatorname{Specm} A_K \simeq \operatorname{Hom}_K(A_K, K)$ et que $\operatorname{Hom}_K((A \otimes_k A')_K, K) \simeq \operatorname{Hom}_K(A_K, K) \times \operatorname{Hom}_K(A'_K, K)$. On définit comme dans 1.1 le sous-ensemble X_r des points rationnels de X. On a

$$X_r = \{x \in X \mid f(x) \in k, \text{ pour tout } f \in M(X)\}.$$

En particulier pour $X = K^n$, on a $X_r = k^n$.

On dit que le $\mathcal{A}$-objet $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est une k-sous-variété affine de $(X, \mathcal{O}_X)$ si Y est un sous-espace topologique de X et si les restrictions à Y des germes de fonctions de $\mathcal{O}_X$ engendrent un faisceau qui coïncide avec $\mathcal{O}_Y$. On a alors $M(X)|_Y \subseteq M(Y)$. Lorsque Y est ouvert, on dit que c'est un ouvert affine de X.

Soit $f \in A \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A}')$ et ϕ l'homomorphisme naturel de A dans l'anneau A_f des quotients de A par f. On démontre (adapter [16, 1.4]) que $\tilde{\phi}: D(f) = \operatorname{Specm} A_{f,K} \to X = \operatorname{specm} A_K$ définit un homéomorphisme de $D(f)$ sur l'ouvert des éléments x de X tels que $f(x) \neq 0$, ce qui permet de les identifier. Dans ces conditions $M(D(f))$ est engendré par $M(X)|_{D(f)}$ et par f^{-1}. Lorsque f varie, les $D(f)$ forment une base d'ouverts affines pour X.

Ceci permet de construire la catégorie $\mathscr{C}$ des k-variétés algébriques qui vérifie les axiomes (1) à (7) de 1.1 et dont $\mathscr{A}$ est une sous-catégorie. Les $\mathscr{C}$-objets sont les espaces topologiques noethériens X muni d'un faisceau $\mathscr{O}_X$ de k-algèbres de K-fonctions tels que X soit la réunion d'ouverts U affines, c'est à dire tels que U muni du faisceau restriction $\mathscr{O}_U$ est une k-variété affine. Par souci de simplicité, nous n'imposons pas de condition supplémentaire d'irréducibilité aux $\mathscr{C}$-objets, comme c'est pourtant l'usage dans des questions similaires de géométrie algébrique. On constate facilement que $\mathscr{C}$ vérifie les axiomes (1) à (5) de 1.1, avec $(S, \mathscr{O}_S)$ comme précédemment, puis on vérifie que $\mathscr{C}$ est une catégorie à produit (adapter [16, 1.20]). Soient $(X, \mathscr{O}_X)$, $(X', \mathscr{O}_{X'})$ dans $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, p_X et $p_{X'}$ les projections canoniques de $X \times X'$ sur X (resp. X'), la structure de $(X \times X', \mathscr{O}_{X \times X'})$ est alors caractérisée comme suit. Si U (resp. U') est un ouvert affine de X (resp. X'), $V = p_X^{-1}(U) \cap p_{X'}^{-1}(U')$ est un ouvert affine de $X \times X'$ et $\mathscr{O}_{X \times X'}(V)$ est engendré par les combinaisons linéaires de fonctions de la forme $(x, x') \to f(x) f'(x')$ avec $f \in \mathscr{O}_X(U)$ et $f' \in \mathscr{O}_{X'}(U')$.

Soit de nouveau $(X, \mathscr{O}_X) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{A})$. On a une bijection $I \mapsto Y = \mathscr{V}(I)$ de l'ensemble des idéaux de $M(X)$ tels que I_K soit un idéal radical de $M(X)_K$ dans l'ensemble des k-sous-variétés affines de $(X, \mathscr{O}_X)$ telles que $M(Y) = M(X)|_Y$. L'application réciproque est donnée par $Y \mapsto I = \mathscr{I}(Y)$. Muni du faisceau $\mathscr{O}_Y$, un fermé Y ainsi obtenu est dit être défini sur k. On obtient tous ses ouverts principaux en prenant les restrictions des ouverts principaux de X. Soit Y' un fermé défini sur k de $(X', \mathscr{O}_{X'}) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{A})$, on vérifie que $Y \times Y'$ est un fermé défini sur k de $(X \times X', \mathscr{O}_{X \times X'})$.

6.3. Nous donnons maintenant des règles pratiques de manipulation des objets et des morphismes de $\mathscr{A}$ et de $\mathscr{C}$. Le fait que tout $\mathscr{A}'$-objet puisse s'écrire sous la forme $k[T_1, ..., T_n]/I$, entraîne que tout $\mathscr{A}$-objet peut se réaliser comme un fermé défini sur k de K^n.

Soit maintenant Y (resp. Y') un fermé défini sur k de K^n (resp. $K^{n'}$). Tous les ouverts principaux de Y s'écrivent sous la forme $Y_f = D(f) \cap Y$ (avec $f \in k[T_1, ..., T_n]$), les $\mathscr{A}$-morphismes φ de Y_f dans Y' sont obtenus en prenant les restrictions à Y_f des applications φ de K^n dans $K^{n'}$ telles que $\varphi(Y_f) \subseteq Y'$ et telles qu'il existe une application polynômiale φ' à coefficients dans k de K^{n+1} dans $K^{n'}$ vérifiant sur $D(f)$

$$\varphi(x_1, ..., x_n) = \varphi'(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)^{-1}).$$

Tous les ouverts U de Y peuvent s'écrire sous la forme d'une réunion finie d'ouverts principaux $\bigcup_p Y_p$. Un $\mathscr{C}$-morphisme de U dans Y' est une application φ dont les restrictions aux Y_p sont des $\mathscr{A}$-morphismes.

Soit $X = \bigcup_p Y_p$ un ensemble recouvert par une réunion finie de k-variétés affines de telle sorte que les $Y_p \cap Y_q$ soient des ouverts de Y_p et que l'injection canonique de $Y_p \cap Y_q$ dans Y_q soit un $\mathscr{C}$-morphisme. Alors on peut munir X d'une unique structure de k-variété algébrique pour laquelle les Y_p sont des ouverts affines. Une application φ de X dans X' est un $\mathscr{C}$-morphisme si et seulement si ses restrictions aux Y_p sont des $\mathscr{A}$-morphismes.

REMERCIEMENTS

Je remercie Michèle Vergne dont les interventions au début de la rédaction de cet article m'ont mis sur la bonne voie. Je remercie également Alain Guichardet, David Wigner et Pierre Cartier pour les références bibliographiques qu'ils m'ont fournies.

RÉFÉRENCES

1. J.-L. CATHELINEAU, Sur un théorème d'intégralité de Kostant, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4)* **10** (1977), 73–86.
2. A. GUICHARDET, "Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie," Cedic–Nathan, Paris, 1980.
3. R. GODEMENT, "Théorie des faisceaux," Hermann, Paris, 1964.
4. A. GROTHENDIECK, *Tohoku Math. J.* **9** (1957), 119–221.
5. G. LION ET M. VERGNE, "The Weil Representation, Maslov Index and Theta Series," Birkhäuser Verlag, Boston, 1980.
6. B. MAGNERON, Fibrations équivariantes et cohomologie des groupes, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math.* **295** (1982), 645–648.
7. B. MAGNERON, Spineurs symplectiques purs et indice de Maslov de plans lagrangiens positifs, *J. Funct. Anal.* **59** (1984), 90–122.
8. C. C. MOORE, Extensions and low dimensional cohomology theory of locally compact groups I, II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **113** (1964), 40–86.
9. H. TILGNER, Symplectic area, Maslov functions and the second cohomology of transformation groups, *Abstracts Amer. Math. Soc.* **27** (1983), 494.
10. D. WIGNER, Algebraic cohomology of topological groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **178** (1973), 83–93.
11. A. BOREL, Linear algebraic groups, *in* "Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups" (A. Borel and G. D. Mostow, Eds.), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 9, pp. 3–19, Amer. Math Soc., Providence, RI, 1966.
12. N. BOURBAKI, "Eléments de mathématique: Algèbre," Chaps. 4–7. Masson, Paris 1981.
13. P. CARTIER, Questions de rationalité des diviseurs en géométrie algébrique, *Bull. Soc. Math. France* **86** (1958), 177–251.
14. R. HARTSHORNE, "Algebraic Geometry," Graduate Texts in Mathematics, Vol. 52, Springer-Verlag, New York/Heidelberg/Berlin, 1977.
15. J. HUMPHREYS, "Linear Algebraic Groups," Graduate Texts in Mathematics, Vol. 21, Springer-Verlag, New York/Heidelberg/Berlin, 1975.
16. S. IITAKA, "Algebraic Geometry," Graduate Texts in Mathematics, Vol. 76, Springer-Verlag, New York/Heidelberg/Berlin, 1981.